



Matemática Passo a Passo

Esquemas todo-partes

Ricardo Cunha Teixeira

NICA - Núcleo Interdisciplinar da Criança e
do Adolescente da Universidade dos Açores

Slides desenvolvidos com a colaboração
das Prof DA Ana Alves e Carla Carreiro,
da EBI das Capelas.



A ideia de intermediar a aprendizagem com uma fase pictórica fundamenta-se precisamente em promover uma contínua passagem do concreto ao abstrato. Quando se propõe uma atividade a uma criança que consiste em desenhar um número de pequenos círculos correspondente ao número de carros que vê numa imagem estamos perante uma atividade de natureza esquemática ou pictórica.

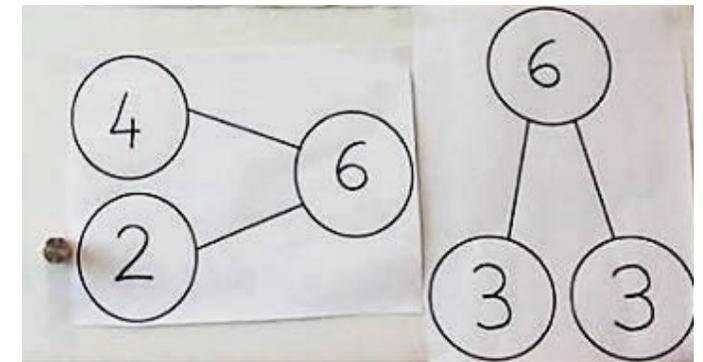
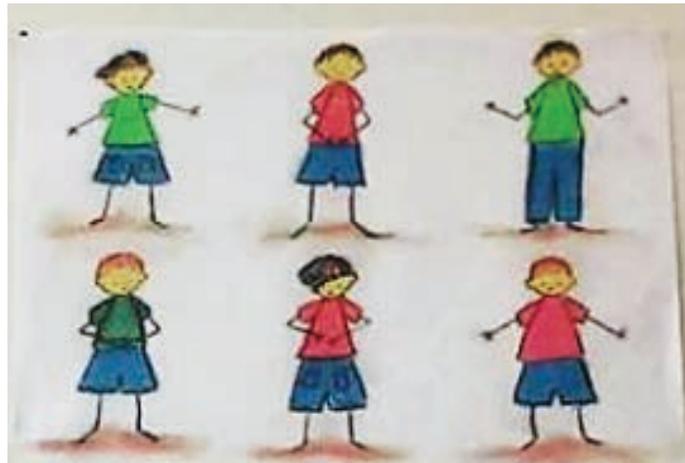
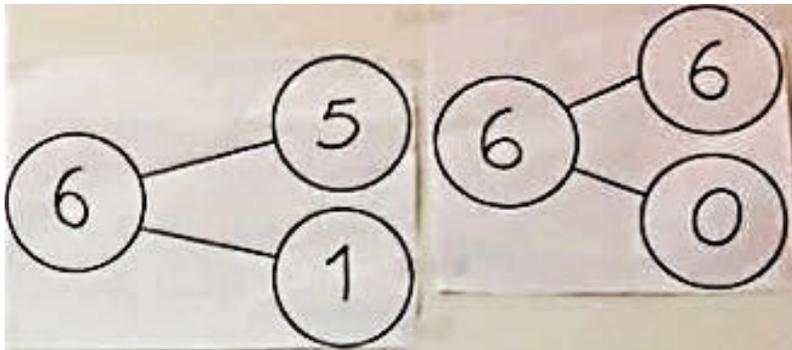
Passamos a descrever um dos procedimentos didáticos utilizados em Singapura que se enquadra na abordagem CPA – os já célebres esquemas todo-partes (*number bonds*). Estas representações auxiliam a compreensão numérica basilar, nomeadamente a capacidade de decompor quantidades e a álgebra fundamental (adições e subtrações). Chamamos a esta fase de aprendizagem *a fase dos 3 S's*: separações, somas e subtrações.

Nota: Trata-se de uma forma de simplificar a linguagem, desde que se tenha em conta as devidas salvaguardas: a palavra separação é utilizada para designar uma decomposição ou partição; a palavra soma remete para o resultado da operação adição.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Definições

Um **esquema todo-partes** constitui uma imagem (inicialmente, concreta; a certa altura, mental) que ilustra uma relação entre um número (todo) e pelo menos outros dois números (partes). É claro que um mesmo número pode ser decomposto de muitas formas diferentes.

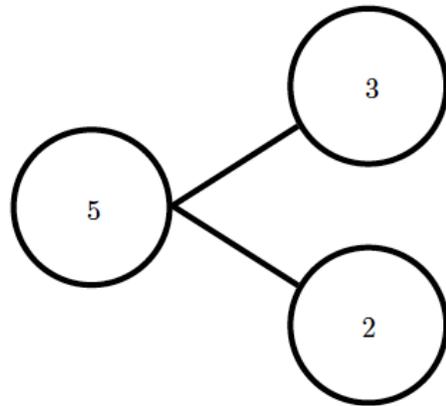


Há dois propósitos fundamentais na utilização dos esquemas todo-partes. O primeiro diz respeito à relação íntima entre os 3 S's: "separações, somas e subtrações". O segundo diz respeito à importância que os 3 S's têm em processos operatórios com maior grau de complexidade.

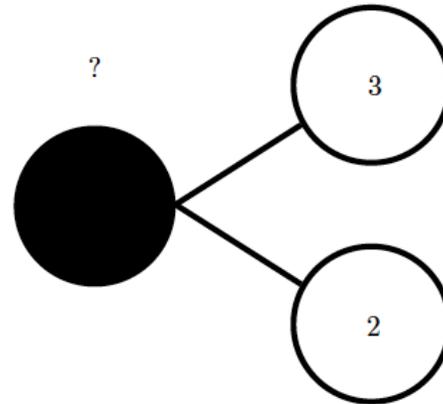
Number bonds (Esquemas todo-partes)

Vantagens didáticas

“Separar”



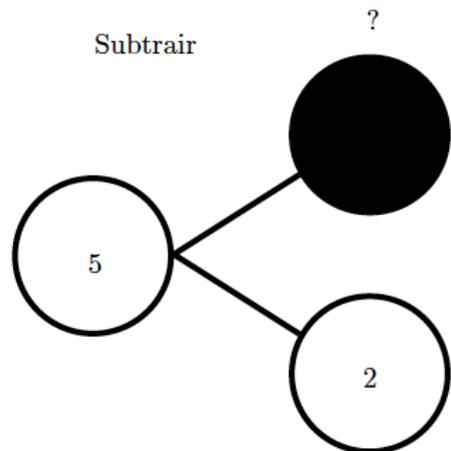
“Somar”



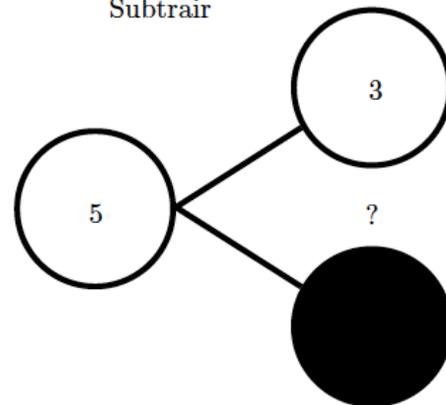
O todo pode ser decomposto em partes.

Ao contrário, quando conhecemos as partes, se assim o quisermos, podemos adicioná-las de forma a recuperar o todo.

Subtrair



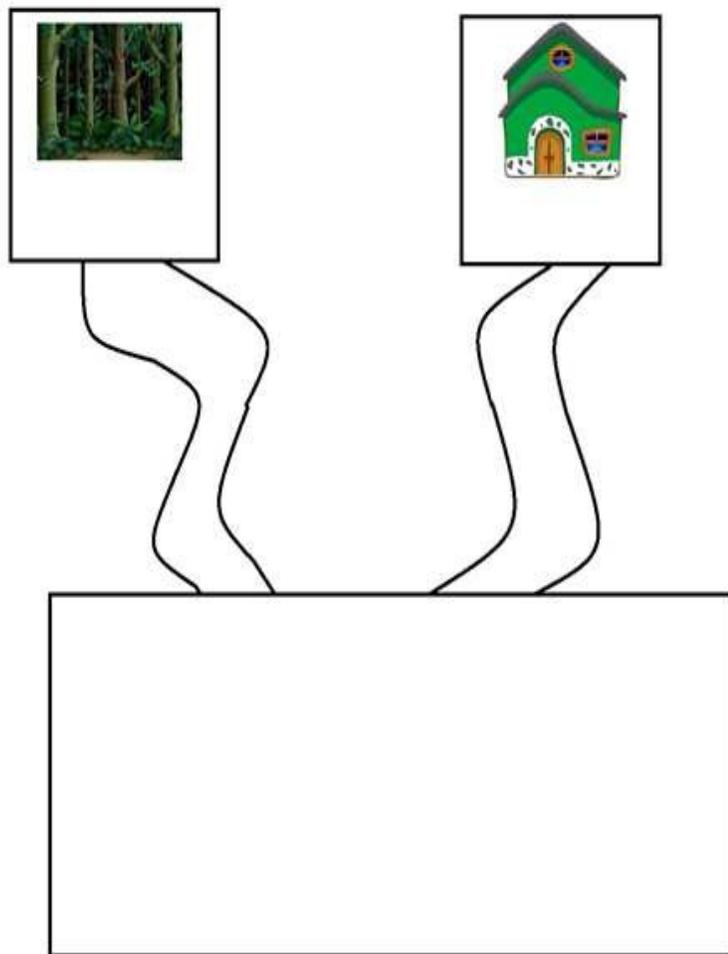
Subtrair



Além disso, se conhecermos o todo e uma das partes, podemos subtrair essa parte ao todo para encontrar a outra parte.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Aplicações na prática



O primeiro objetivo consiste em fazer com que a criança consiga relacionar um todo com as suas partes. Aconselha-se a utilização de movimento nas primeiras explorações. Vejamos um exemplo.

Coloca-se a imagem ao lado em cima de uma mesa e 5 animais no retângulo grande: um cão, um gato, um tigre, um elefante e um leão. Pergunta-se “Quais os animais que podem viver na nossa casa? E quais os que têm de viver na selva?”. À medida que se discute o assunto com a criança (“O leão tem de ir para a selva, senão comia as pessoas lá de casa.” ou “O cão pode ir para casa, eu tenho um.”), fazem-se dois movimentos (leão, tigre e elefante para a selva e cão e gato para casa). Deve-se terminar com uma explicação do que foi feito: “Tínhamos 5 animais, 2 foram para casa e 3 foram para a selva.”.

Deve-se repetir este tipo de atividade com outros contextos (por exemplo, com terra, mar e transportes terrestres/marítimos). Gradualmente, deixa-se ser a criança a explicar.

É importante incentivar a prática da oralidade. Nós pensamos com palavras; se queremos que as crianças pensem bem, devemos incentivá-las a explicar o seu raciocínio, promovendo a comunicação oral, o uso de um vocabulário rico e a construção frásica seguindo um esquema gramatical adequado.

As descrições do tipo

“Há 5 animais, 2 são animais domésticos e 3 são animais selvagens.”

são o meio que temos para avaliar se a compreensão numérica e algébrica está realmente a ser aplicada às situações concretas e quotidianas. É exatamente isto que é a base da compreensão. Não interessa apenas saber que o 5 se pode decompor em 2 e 3 ou que $2+3=5$; é necessário visualizar e entender estes factos aplicados a situações concretas.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

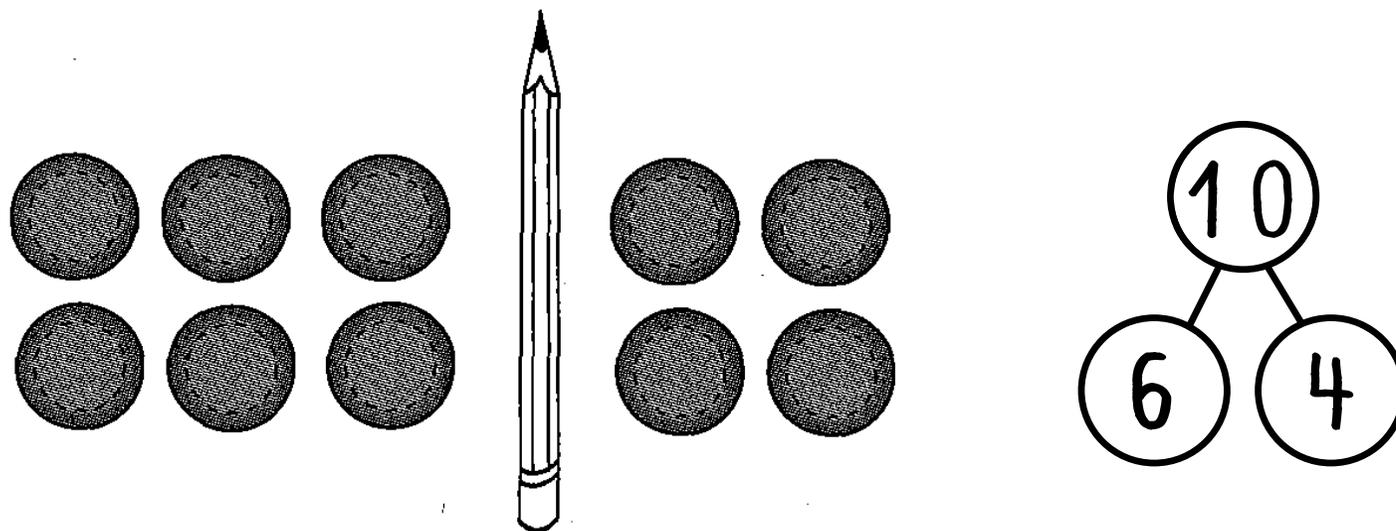
Aplicações na prática

Deve-se seguir a abordagem CPA. Vejamos um exemplo com lápis e botões.

Começa-se por escolher um número. Por exemplo, 10.

Colocam-se 10 botões (ou outros marcadores) sobre a mesa. Solicita-se à criança que divida esses botões em dois conjuntos, usando um lápis de modo a criar uma imagem visual dos dois conjuntos.

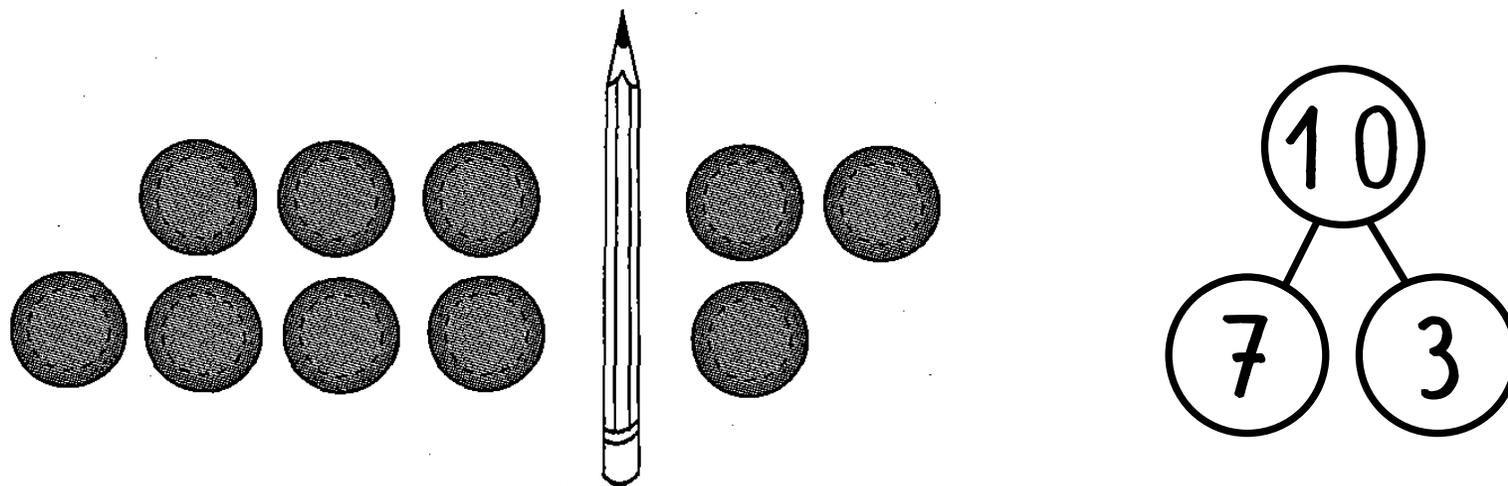
Regista-se, de seguida, a decomposição efetuada num esquema todo-partes. Reforça-se que “10 é o todo”, “6 é uma parte do 10”, “4 é outra parte do 10” e “6 e 4 faz 10”. Nesta fase, não se utilizam os termos “mais” nem “menos”.



Number bonds (Esquemas todo-partes)

Aplicações na prática

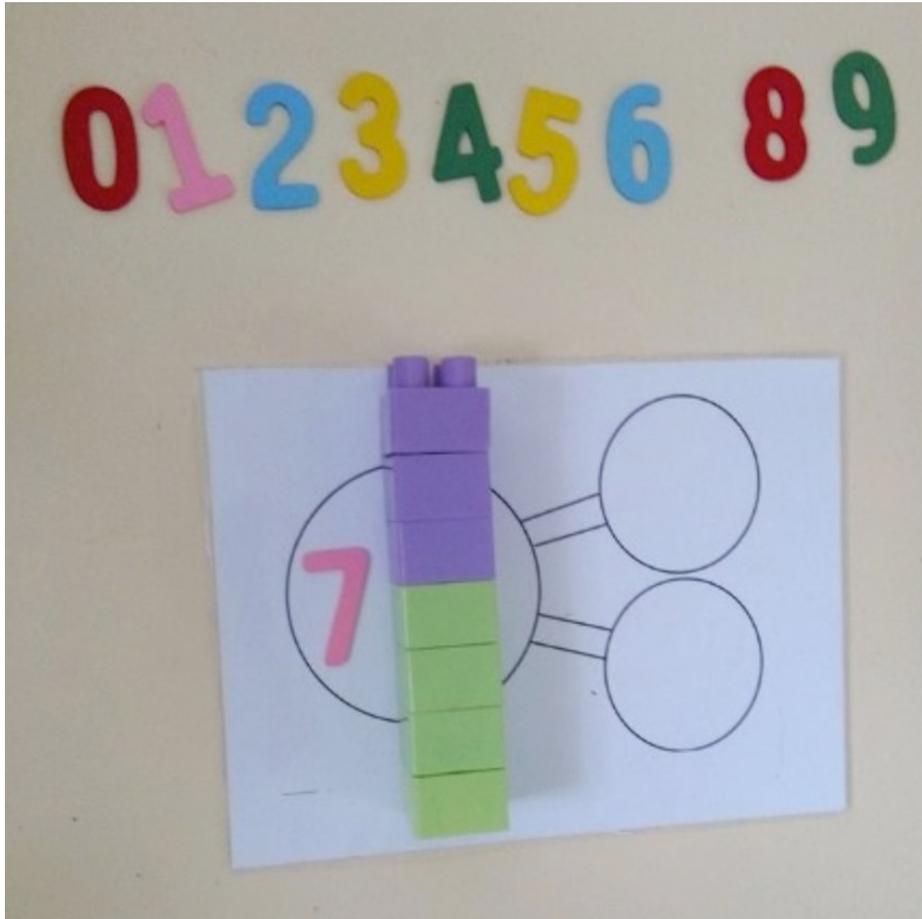
A primeira exploração pode ser feita pelo professor como forma de exemplificar a dinâmica da atividade. Em seguida, pede-se à criança para encontrar outras formas de “partir”/decompor o 10.



Exemplifique e incentive a criança a fazer os seguintes gestos, à medida que o esquema todo-partes é lido: pôr as duas mãos junto à cabeça e dizer “o todo é 10”; baixar uma mão e dizer “uma parte é 7”; baixar a outra mão e dizer “a outra parte é 3”. Em seguida, pode-se treinar o movimento em sentido contrário (para uma introdução à adição): pôr uma mão no ar e dizer “uma parte é 7”; pôr a outra mão no ar e dizer “a outra parte é 3”; juntar as mãos na cabeça e dizer “o todo é 10” .

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Aplicações na prática



Depois de algumas explorações com objetos que apelem ao concreto, é importante introduzir materiais manipuláveis (por exemplo, legos), que apelem ao pictórico.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

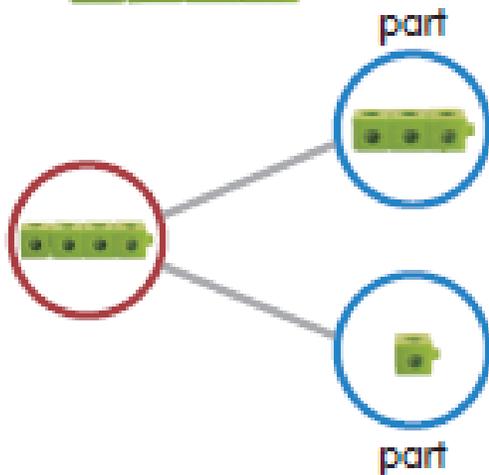
Aplicações na prática

Learn

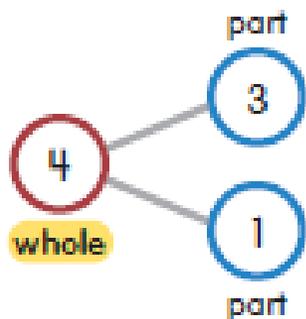
You can make number bonds with .

You can use a number train to make number bonds.

Sam put  into two parts.



How many are in each **part**?



3 and 1 make 4.

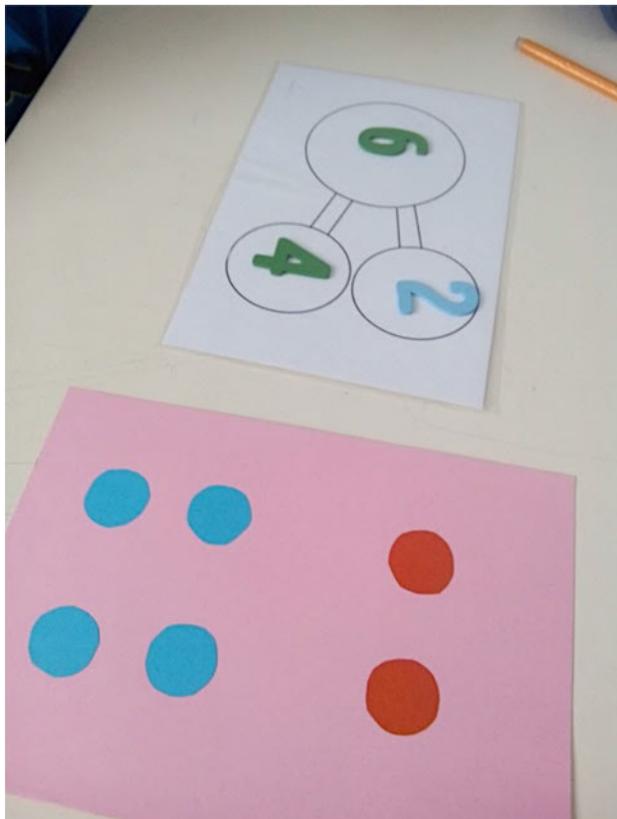
This picture shows a **number bond**.

Ao lado, uma atividade realizada com cubos de encaixe.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Aplicações na prática

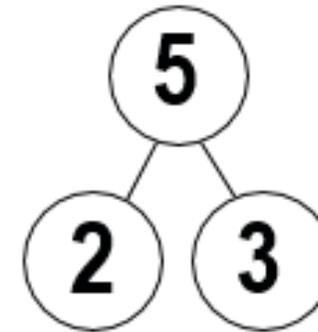
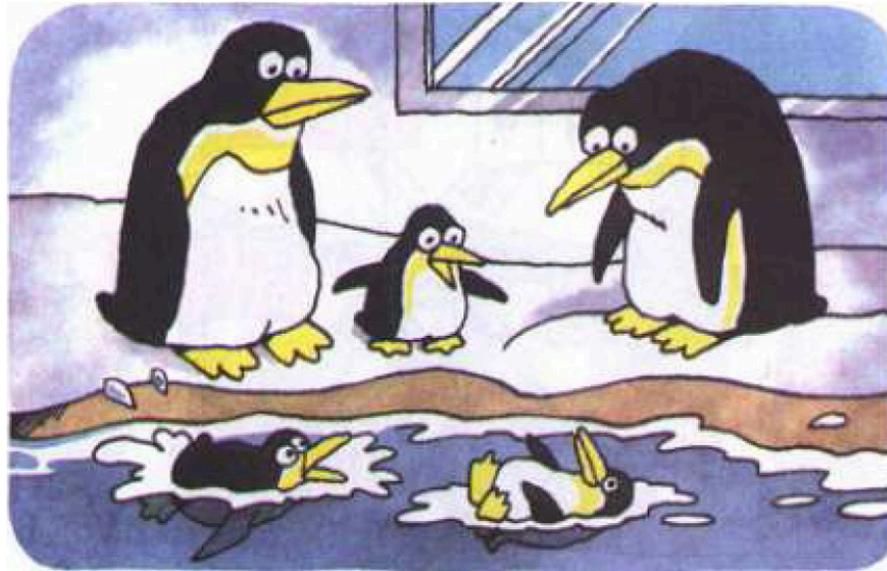
Os esquemas todo-partes podem ser classificados por grau de dificuldade de acordo com alguns pormenores relativamente à forma como podem ser exploradas as atividades:



- 1 Uma só explicação possível para uma única decomposição.

No exemplo apresentado, a única explicação possível é: “Há 6 círculos coloridos, 2 são vermelhos e 4 são azuis.”.

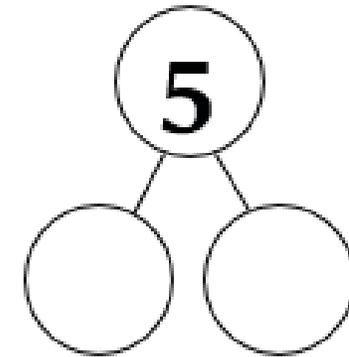
- ② Mais de uma explicação possível para uma única decomposição.



No exemplo apresentado, “Há 5 pinguins, 2 estão dentro de água e 3 estão cá fora.” e “Há 5 pinguins, 2 são grandes e 3 são pequenos.” são duas das explicações possíveis.

Estas atividades são ótimas para trabalho em grupo, na medida em que diferentes crianças podem apresentar diferentes explicações.

- 3 Mais de uma decomposição possível; a forma como se decompõe o todo em partes é deixada em aberto.

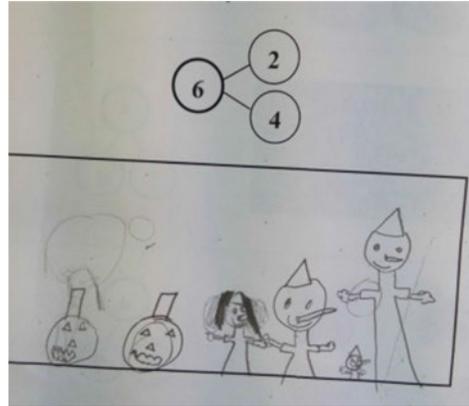


No exemplo acima, “Há 5 meninas, 2 têm laço na cabeça e 3 não têm.”, “Há 5 meninas, 1 está de vestido e as outras 4 não.” ou “Há 5 seres vivos, 5 pessoas e 0 elefantes.” constituem todas as decomposições possíveis do número 5.

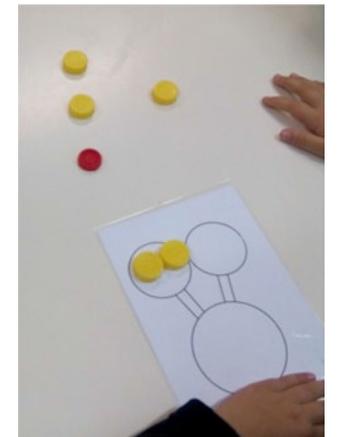
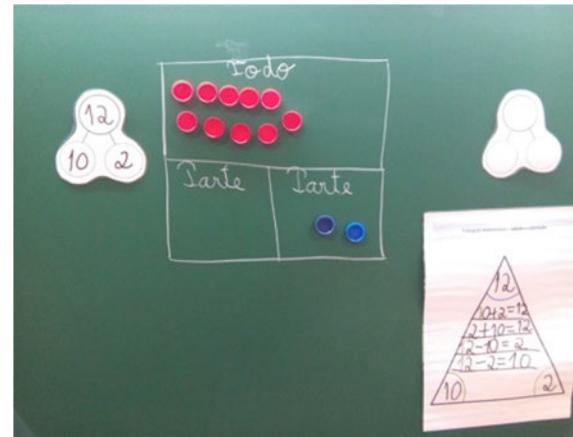
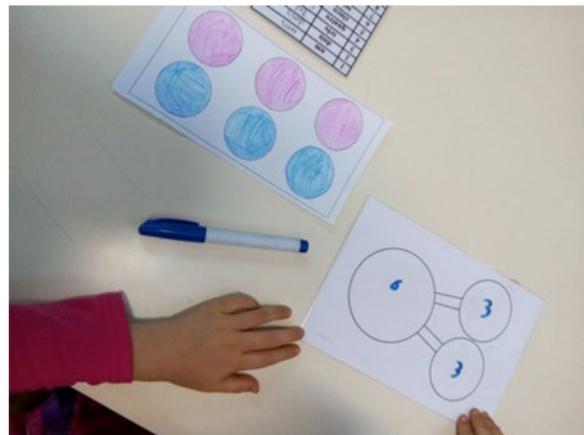
Number bonds (Esquemas todo-partes)

Aplicações na prática

- 4 A criança desenha e explica.



Um conselho vindo diretamente da prática diz respeito à posição do esquema todo-partes. Deve variar-se; o que interessa é a decomposição do todo nas suas partes e não a posição em que a dita decomposição aparece.

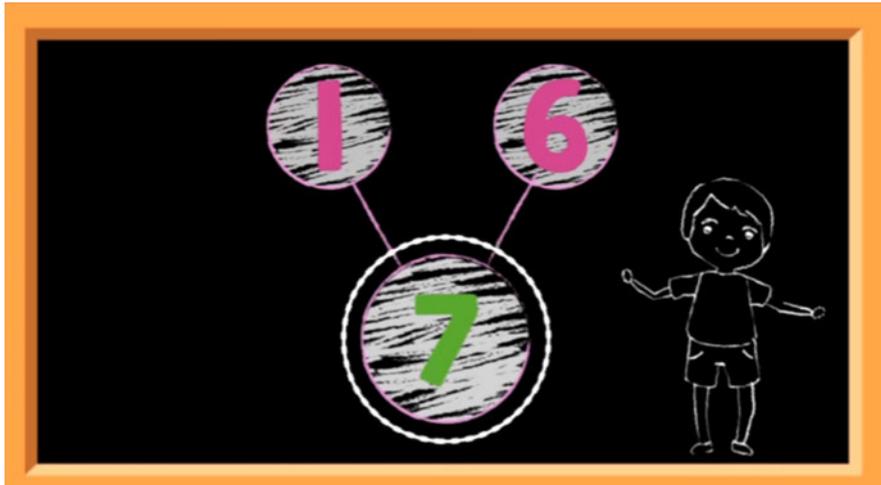


Number bonds (Esquemas todo-partes)

Canções

O código dos números (*Number bonds* dos números até 10)

<https://youtu.be/t0tIHAHIV7M>



As ovelhas do João (Amigos do 10)

<https://youtu.be/iz9dL1In6rM>



Number bonds (Esquemas todo-partes)

Adição

Quando se separa ou decompõe, parte-se do todo para as partes; quando se adiciona, o caminho é feito em sentido contrário, das partes para o todo. Repare-se que utilizámos “quando se adiciona” e não “quando se acrescenta” ou “quando se junta”. Isso foi propositado, uma vez que acrescentar e juntar são verbos associados aos dois sentidos da adição.

Abaixo, ilustra-se essa dualidade **acrescentar** versus **juntar** (chegam novas crianças ao jardim versus existem no jardim flores vermelhas e amarelas). É importante diversificar as situações exploradas.



Exemplos dos diferentes sentidos da subtração.

Retirar

- Uma menina tinha 5 balões, dois deles rebentaram. Com quantos ficou?
- Eu tinha 10 rebuçados, comi 9. Com quantos fiquei?
- O Daniel tinha 5 carros, 5 deles avariaram-se. Quantos carros do Daniel ainda funcionam?

Completar

- O João tem 3 berlindes mas precisa de 8. Quantos lhe faltam?
- A Rita quer comprar um casaco novo. O casaco custa 56 euros, mas a Rita só tem 24 euros. Quanto dinheiro terá de pedir aos pais para conseguir comprar o casaco?

Comparar

- O Rui tem 20 peças de lego e a Joana 12 peças. Quantas peças tem o Rui a mais que a Joana?
- O José tem 7 gatos e a Rute 4 cães. Quantos animais tem a Rute a menos que o José?

Separar

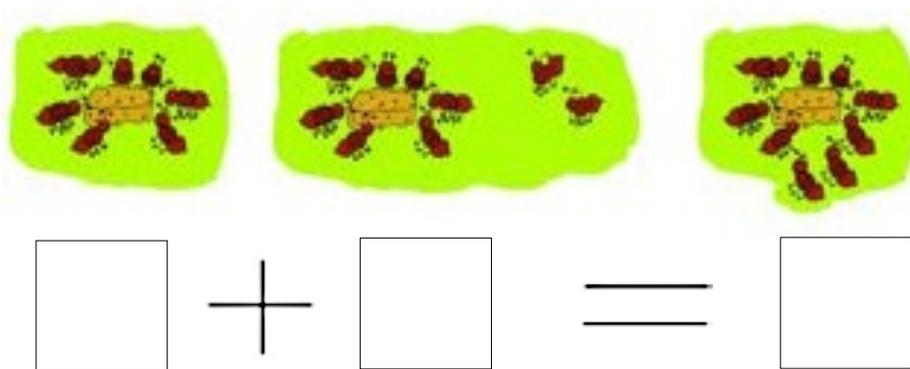
- Num grupo de 5 crianças, 2 são raparigas. Quantos rapazes existem? (**Separação por género**)
- Num conjunto de 10 peças brancas e pretas, 4 são brancas. Quantas são as peças pretas? (**Separação por cor**)

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Adição e subtração

No que diz respeito à subtração, o primeiro significado a explorar deve ser o **retirar** e, apenas numa fase posterior, o **completar** e o **comparar**. O significado de **separar** é transversal a todos os outros, pelo que pode ser trabalhado em qualquer momento que se entenda oportuno.

Os sinais +, - e = devem ser trabalhados de forma contextualizada. Veja-se o exemplo abaixo. Há uma história para contar: “Estavam 7 formigas a comer um queijo; chegaram mais 2; no total, ficaram 9 formigas a comer o queijo.”. Depois, com a expressão $7 + 2 = 9$, falando e apontando para os sinais ao mesmo tempo, deve-se referir: “7 formigas a comer o queijo mais 2 formigas que chegaram é igual a 9 formigas a comer o queijo”. A contextualização significa tudo em termos de compreensão.

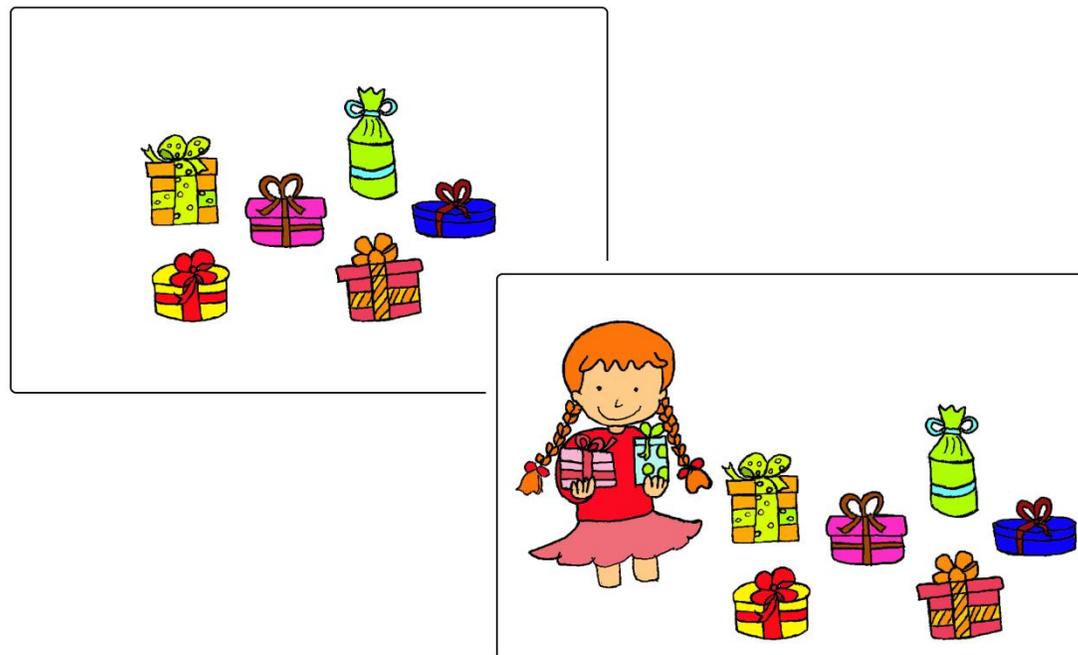


Number bonds (Esquemas todo-partes)

Adição e subtração

Apresenta-se outro exemplo de uma atividade útil para pedir a uma criança uma história envolvendo a operação de adição. Neste exemplo, e ao contrário da atividade das formigas, utilizam-se apenas duas gravuras.

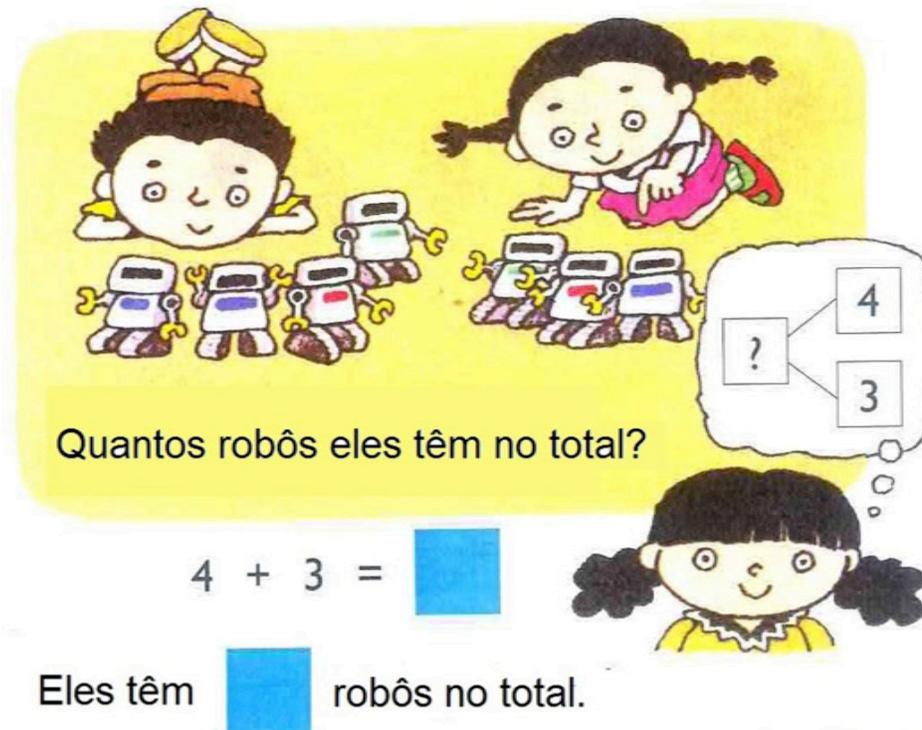
Este tipo de atividade deve terminar com o preenchimento dos espaços em branco (...+...=...). Numa fase posterior, a criança deve também escrever os sinais + e =.



Number bonds (Esquemas todo-partes)

Adição e subtração

Na transição das decomposições para as operações de adição e subtração, deve-se apresentar lado a lado o esquema todo-partes. Esse procedimento procura fazer com que as crianças percebam que uma adição tem traços comuns com uma decomposição; há também um todo e as partes, a única diferença é que o pretendido consiste em unir as partes para encontrar o todo.



Quantos robôs eles têm no total?

$4 + 3 = \square$

Eles têm \square robôs no total.

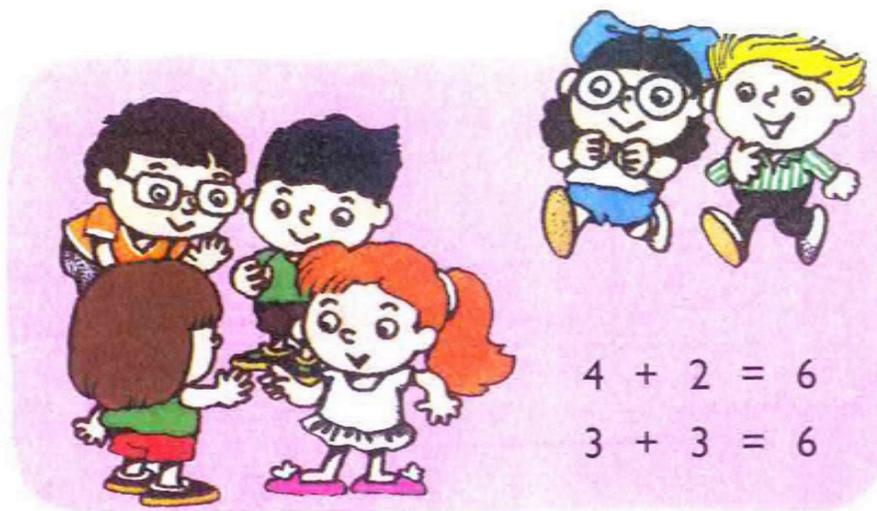
The illustration shows a boy with a topknot and a girl with pigtails, each with four small robots. A thought bubble from the girl shows a number bond with a question mark on the left, and the numbers 4 and 3 on the right. Below the scene, the equation $4 + 3 = \square$ is shown, and the sentence 'Eles têm \square robôs no total.' is written.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Adição e subtração

As histórias para explorar a adição e a subtração devem seguir o mesmo tipo de estrutura das histórias usadas para trabalhar as decomposições. E também devem ser alvo de uma classificação semelhante à que foi feita para as decomposições, na medida em que pode haver resposta única, ou não, e operação única, ou não.

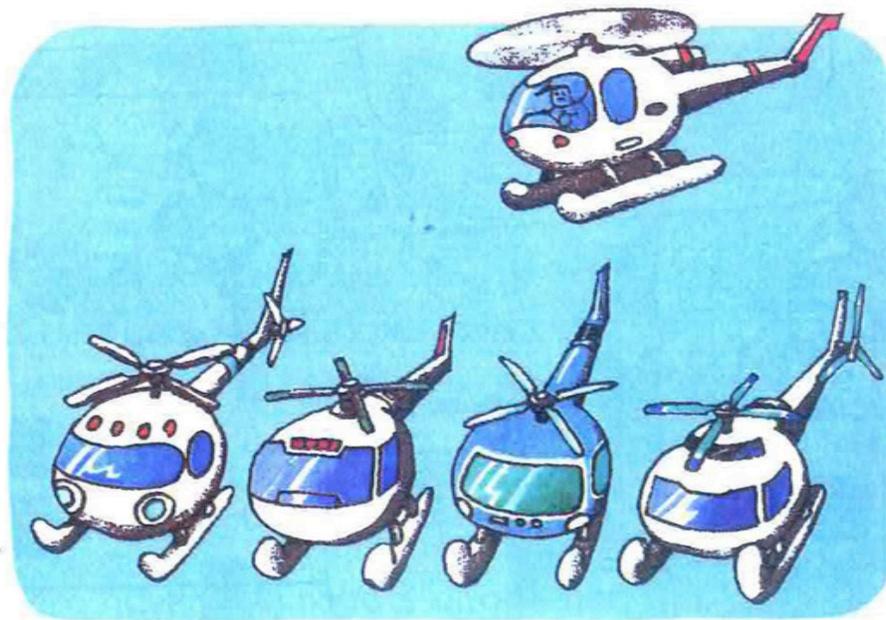
Apresentam-se dois exemplos com objetivos distintos. No primeiro, solicita-se à criança que identifique as adições expostas na situação (“Estavam 4 crianças a falar; chegaram mais 2; no total, ficaram 6 crianças”, “Havia 3 rapazes e 3 raparigas; no total, havia 6 crianças”). É um exemplo interessante, na medida em que permite explorar os dois sentidos da adição: acrescentar e juntar.



Number bonds (Esquemas todo-partes)

Adição e subtração

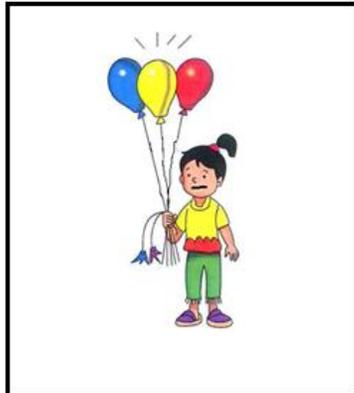
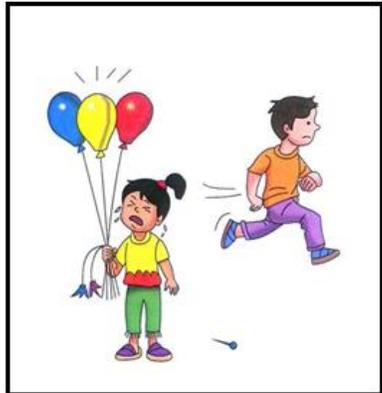
No próximo exemplo, a criança deve escrever e explicar igualdades (recorrendo aos símbolos + e =). Também podem ser explorados os dois sentidos da adição.



No que diz respeito à subtração, o caminho é em tudo idêntico. De seguida, apresentam-se quatro exemplos, num claro paralelismo com os que exploramos para a adição.

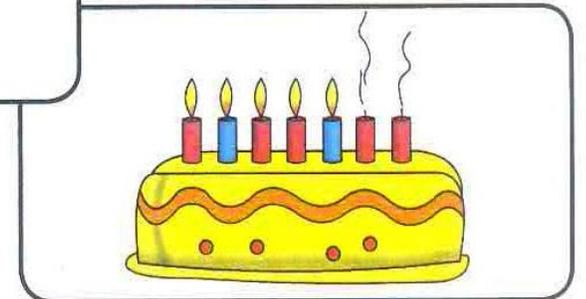
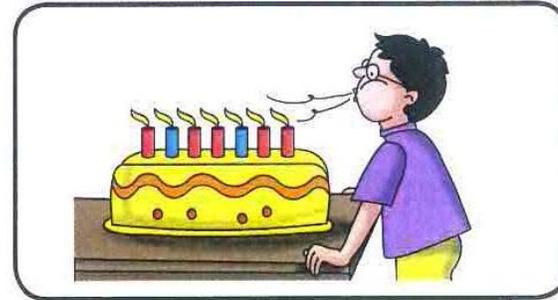
Number bonds (Esquemas todo-partes)

Adição e subtração



—

=

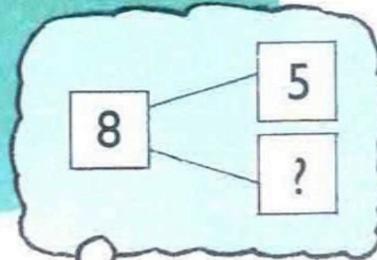


Number bonds (Esquemas todo-partes)

Adição e subtração



5 bonecas pertencem à Morgan.
As restantes pertencem à Emily.
Quantas bonecas tem a Emily?



$$8 - 5 = \square$$

A Emily tem bonecas.



Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!

Álbum dos Number Bonds:

<https://www.facebook.com/media/set/?set=a.1670458319895324.1073741868.1405206259753866&type=3>



Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!

O Mocho dos *Number Bonds*!



Trabalho desenvolvido por um encarregado de educação,
na sequência do “curso dos *number bonds*”,
promovido por Lurdes Bettencourt,
Prof DA da EBS das Velas.
(Convém acrescentar o 10, fazer de 0 a 10...)



Trabalho desenvolvido por César Silva,
Prof DA da EBS da Madalena.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!

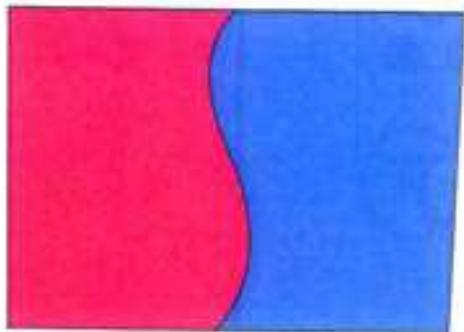
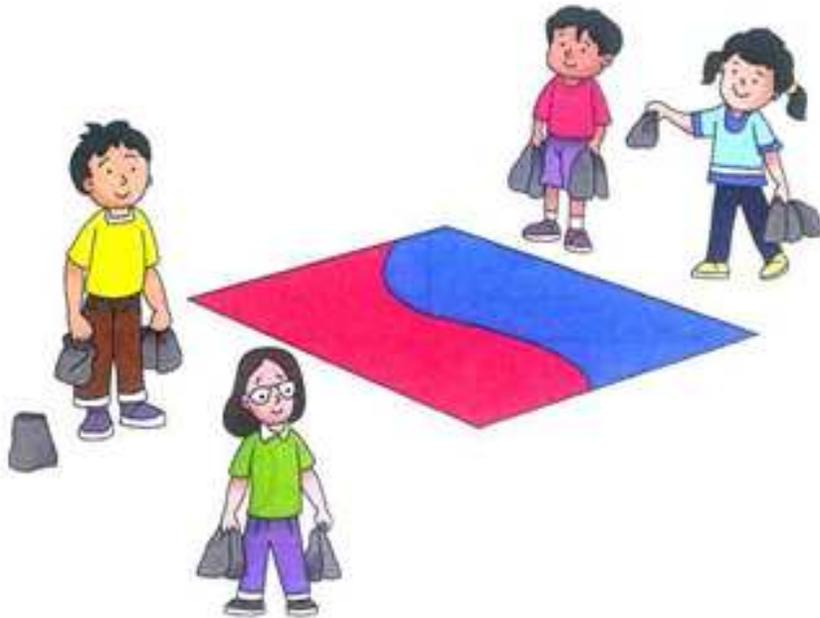
A vaquinha dos *Number Bonds*!



Trabalho desenvolvido por um encarregado de educação, na sequência do “concurso dos *number bonds*”, promovido por Lurdes Bettencourt, Prof DA da EBS das Velas.
(Convém acrescentar o 10, fazer de 0 a 10...)

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!



Nesta atividade, é apresentado um jogo de tapete.

Tendo o cuidado de distribuir por duas equipas sacos em número igual ou inferior a 10 (no total), uma das equipas tenta acertar na zona vermelha e a outra tenta acertar na zona azul; no final, organiza-se o resultado num esquema todo-partes. Por exemplo,

“Reparem que 8 sacos caíram sobre o tapete, 5 na parte azul e 3 na parte vermelha; dos 8 pontos, 5 pontos são para a equipa do Tomás e 3 pontos para a equipa da Lara; fizemos a decomposição do 8 em 5 e 3.”

Number bonds (Esquemas todo-partes)

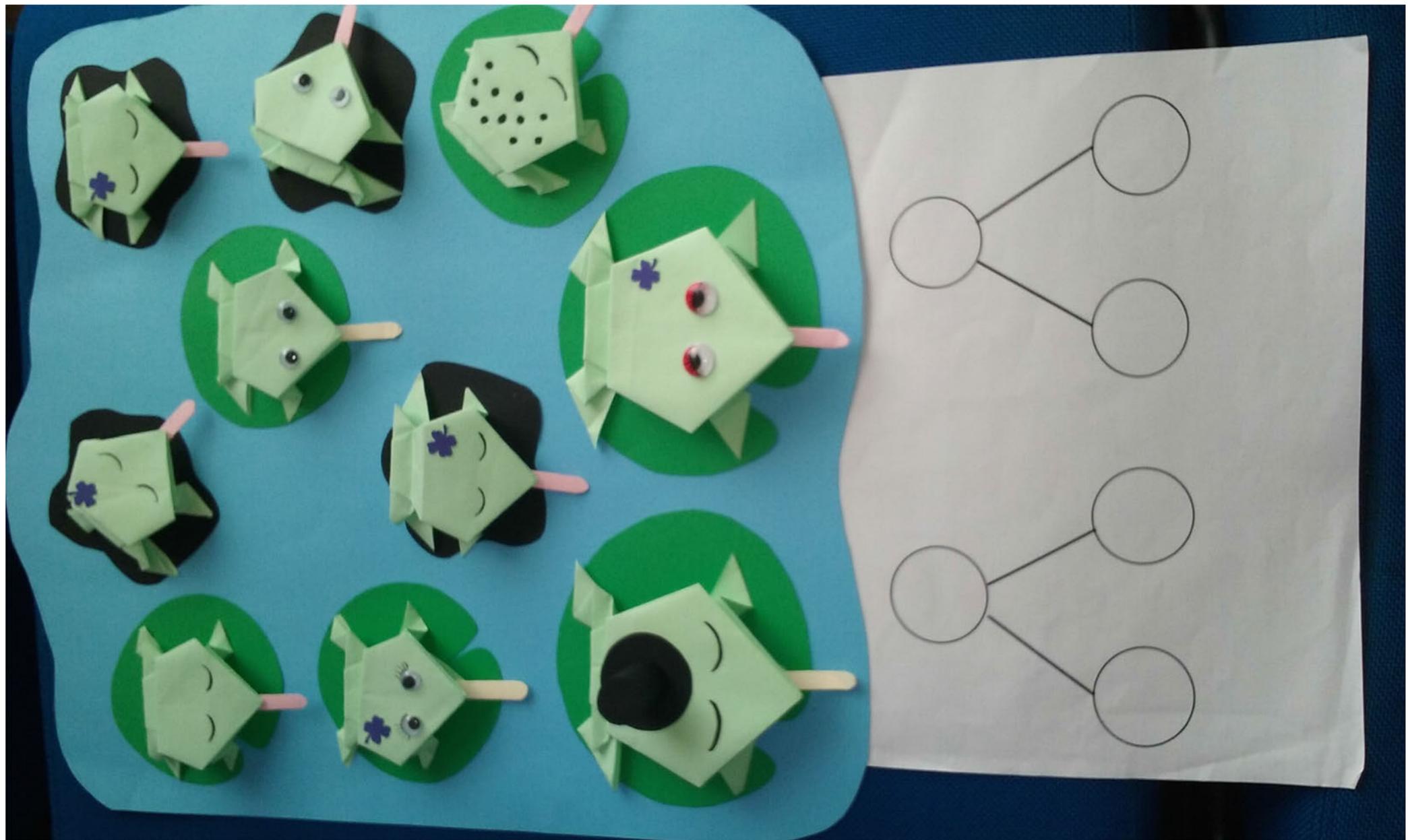
Ideias não faltam!



É importante construir materiais diversificados, com apelo ao concreto, que originem explorações ricas.

Neste exemplo: “Há 6 sapos, 1 tem uma flor e 5 não têm.”, “Há 6 sapos, 2 têm olhos amarelos e 4 têm olhos verdes.” ou “Há 6 sapos, 3 têm língua amarela e 3 têm língua cor de rosa.”.

Nos próximos dois exemplos, é possível explorar todas as decomposições do 10.



Prof DA Graça Ponte e Lúcia Moniz (EBI da Lagoa)



Carla Medeiros (Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, UAc)

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!



O jogo dos feijões!

A turma é dividida em grupos de dois. Para cada grupo, procede-se da seguinte forma. Uma criança abre o frasco e retira entre 2 e 10 feijões.

A criança mostra ao colega quantos feijões tem na mão.

Em seguida, coloca as mãos atrás das costas e passa alguns feijões para a mão que não tem feijões.

A criança mostra ao colega os feijões que tem numa das mãos e pergunta “Quantos feijões estão escondidos na outra mão?”. Faz-se o registo num esquema todo-partes.

Os dois alunos repetem a atividade, trocando de funções.



Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!



Neste exemplo, ilustra-se o *Jogo dos Comboios* realizado com peças *Cuisenaire*.

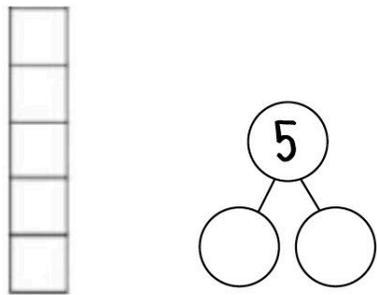
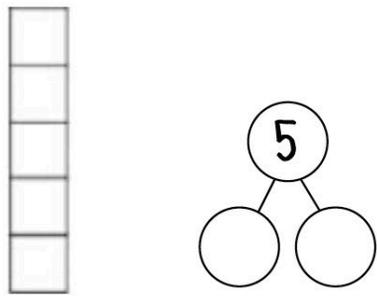
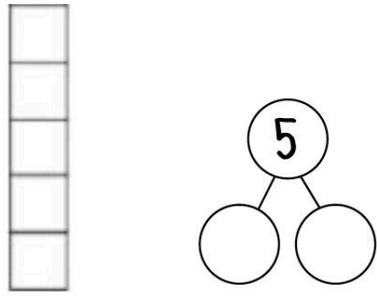
Pede-se a uma criança para colocar uma peça na posição horizontal (peça laranja, no exemplo). Essa peça será a estação de comboios. Em seguida, os colegas colocam comboios com máquina e carruagem à frente da estação, não podendo haver comboios maiores ou menores do que a estação (peças preta e verde, no exemplo).

Este jogo pode ser adaptado a outras temáticas como, por exemplo, camiões e os seus atrelados.

Utilizam-se esquemas todo-partes para registar as diferentes situações.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!

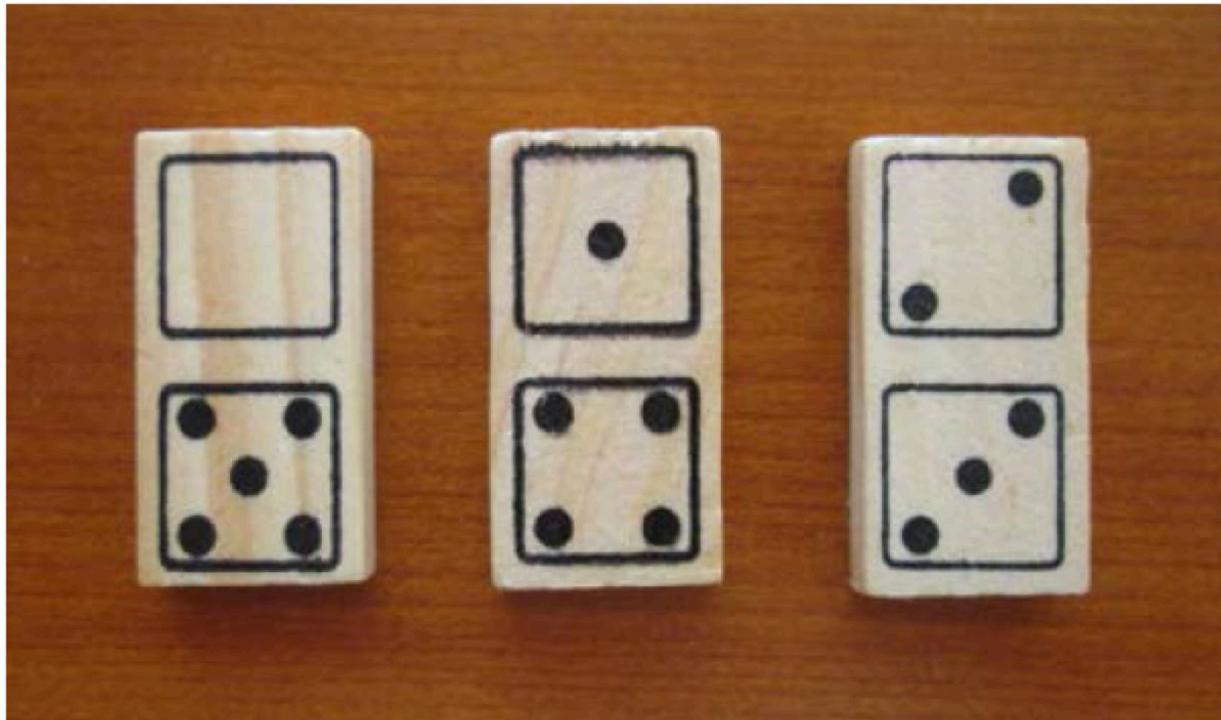


Atividade semelhante à anterior, em que se utilizam barras *Cuisenaire* para sobrepor à barra lateral. Posteriormente, pintam-se os quadradinhos de duas cores, de acordo com a decomposição.

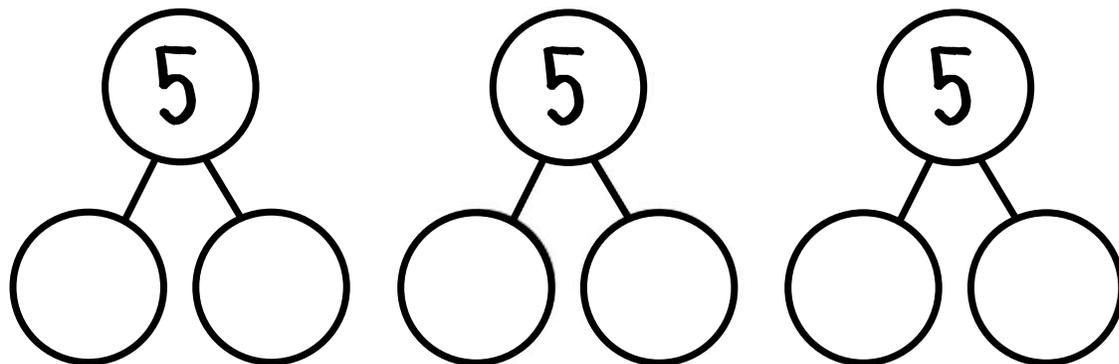
Esta atividade deve ser repetida para outros números (dentro da primeira dezena).

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!

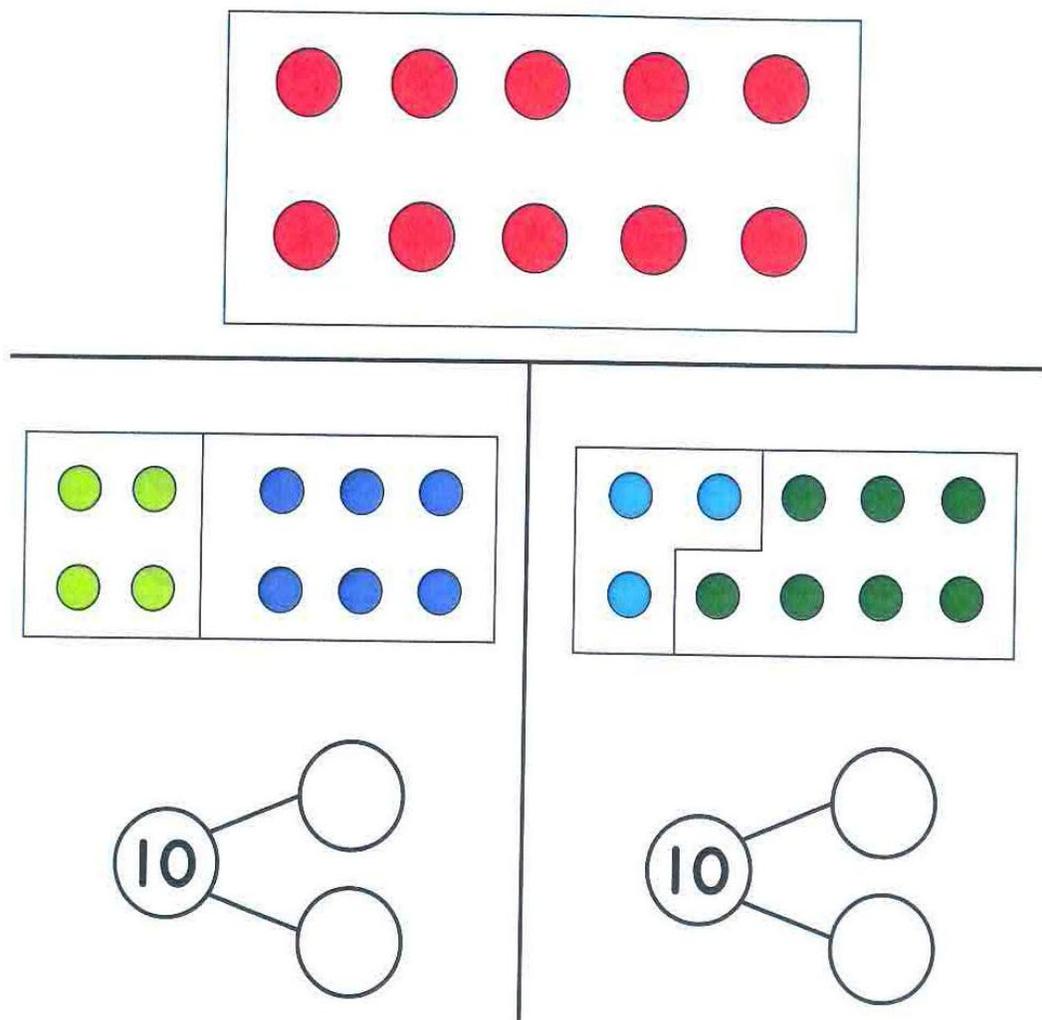


Segue-se um exemplo em que se utilizam peças de dominó. A criança deve selecionar todas as peças de dominó cujo total seja 5 e, para cada uma delas, preencher um esquema todo-partes.



Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!



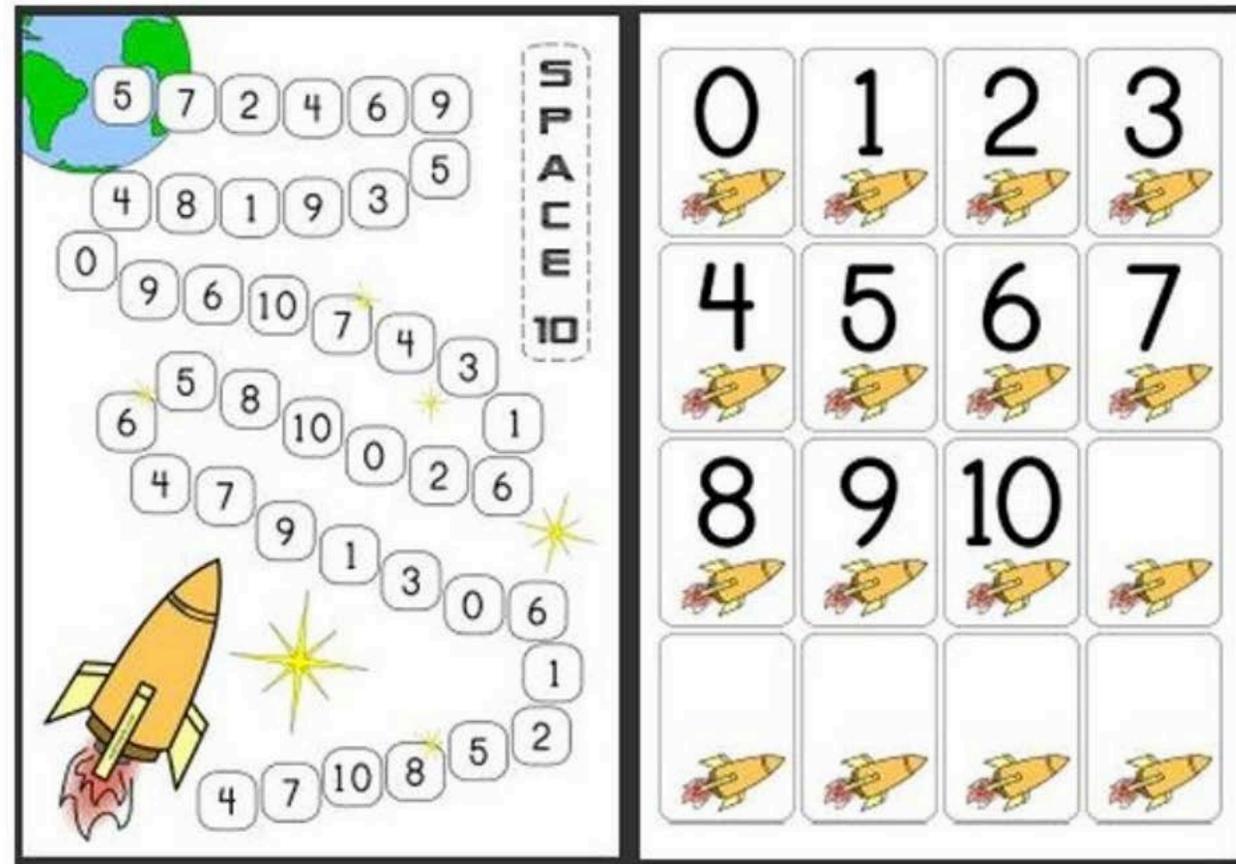
Mostra-se mais um exemplo puramente esquemático: já não há caras, pinguins ou comboios, apenas pequenos círculos. É importante ir fazendo esse percurso, tornando as situações gradualmente mais abstratas.

O mesmo tipo de atividade pode ser desenvolvido recorrendo a representações pictóricas de outros números (dentro da primeira dezena).

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!

Um jogo de tabuleiro interessante para os amigos do 10... Este jogo pode ser adaptado para explorar os amigos de outros números.



<http://mathsticks.com/my/2014/06/bonds-10-rocket-game>

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!

Salva a baleia!

The screenshot shows a game interface for 'save the whale'. At the top left is a 'back to ictgames.com' button. The title 'bonds of 10' is displayed in the center. On the right, the URL 'www.ictgames.com' and copyright '(c) J. Barrett, 2006' are visible. The main area features a blue whale in a hole in the ground. To the right of the hole, there are several pipes of different lengths and colors (blue and grey) with numbers on them. A wrench icon is at the bottom left with the text 'change pipe (optional)'. The pipes are arranged as follows: a blue pipe with '10' (10 segments), a blue pipe with '10' (10 segments) and a grey pipe with '5' (5 segments) connected to it, a grey pipe with '4' (4 segments), a grey pipe with '3' (3 segments) and a grey pipe with '5' (5 segments) connected to it, a grey pipe with '2' (2 segments) and a grey pipe with '6' (6 segments) connected to it, a grey pipe with '1' (1 segment) and a grey pipe with '7' (7 segments) connected to it, a grey pipe with '8' (8 segments), and a grey pipe with '9' (9 segments).

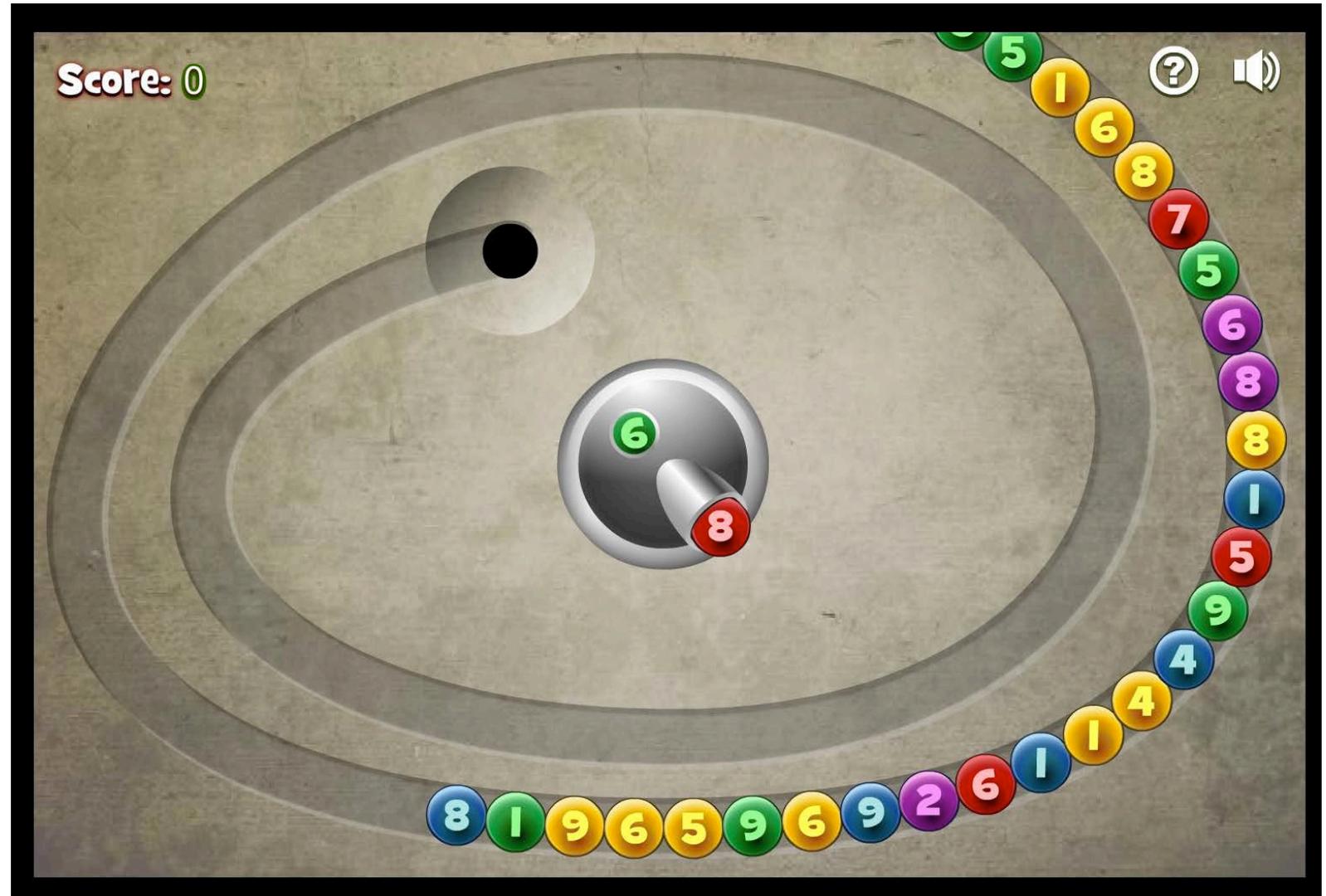
[http://www.ictgames.com/save the whale v4.html](http://www.ictgames.com/save_the_whale_v4.html)

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Ideias não faltam!

Coleciona amigos do 10!

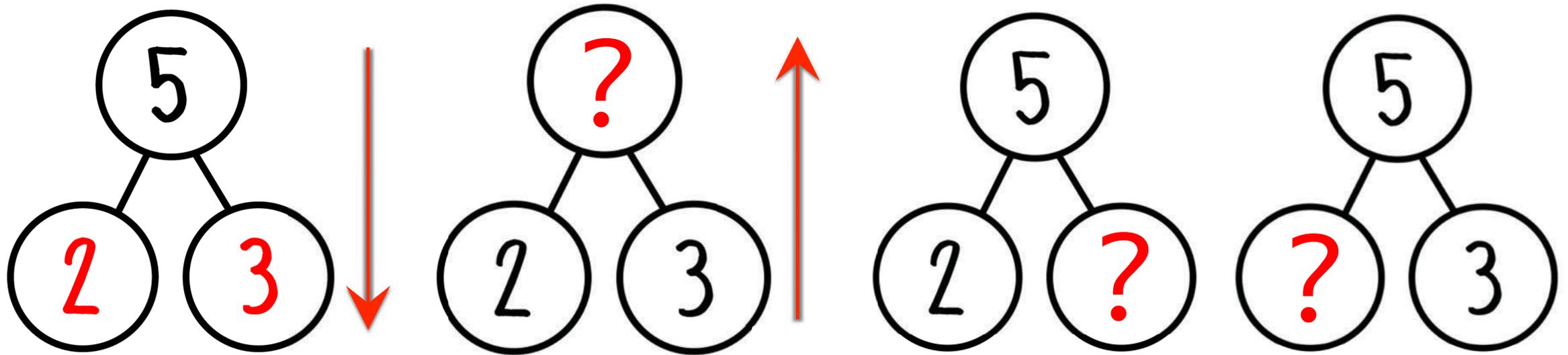
Cuidado: Este jogo é viciante!



http://www.mathplayground.com/number_bonds_10.html

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Em resumo...



Os esquemas todo-partes ajudam os alunos a perceber que os números podem ser “partidos” (decompostos) em partes de modo a simplificar os cálculos. Através de um esquema visual, as crianças exploram as relações entre diferentes números, concretamente entre um todo e pelo menos duas das suas partes.

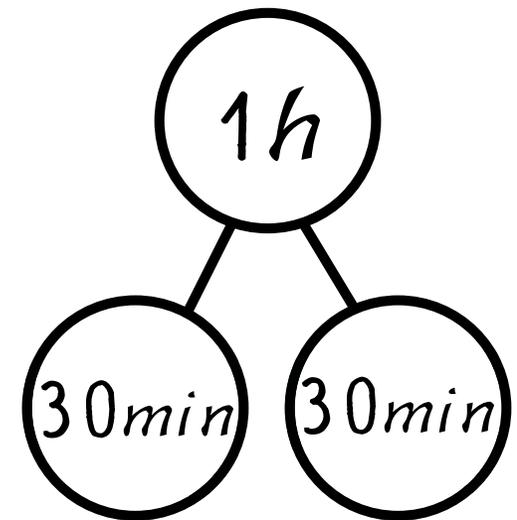
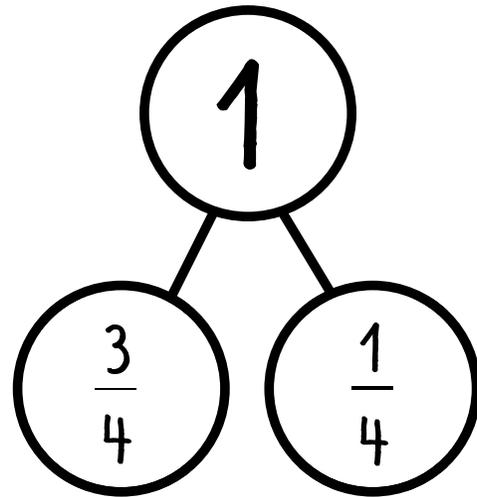
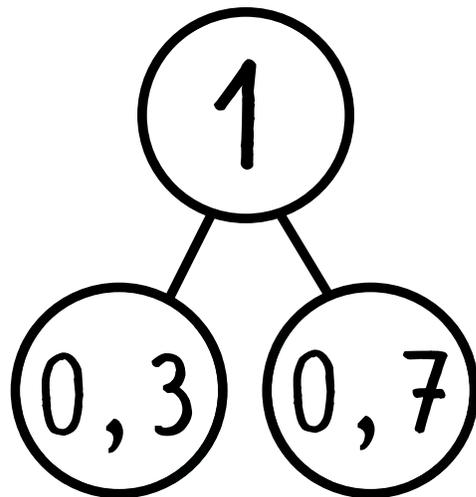
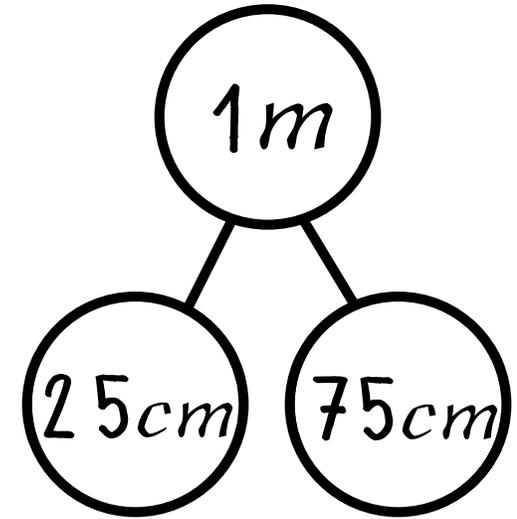
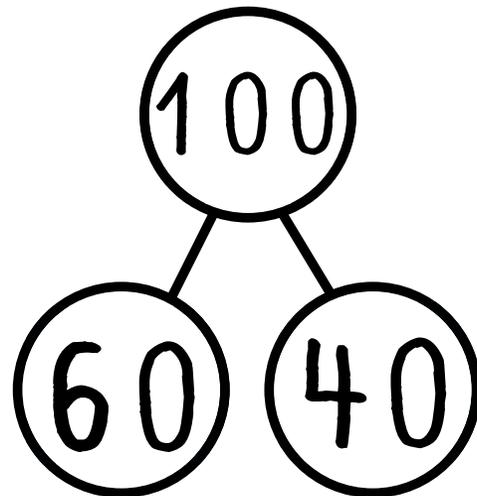
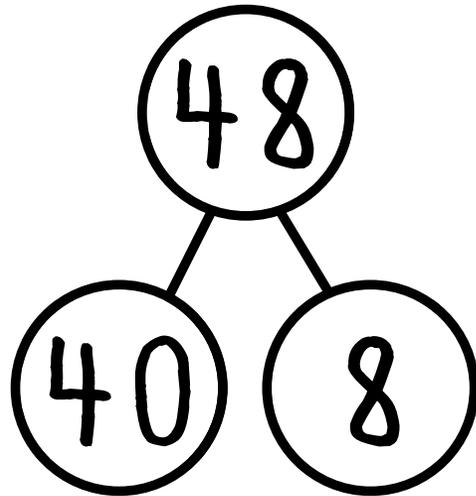
Esta abordagem é inovadora e posiciona-se contra outras abordagens clássicas que assentam na memorização de factos numéricos desligados uns dos outros e com pouco significado para as crianças.

Ao encher a sala de aula com *number bonds*, os alunos são estimulados a perceber, por exemplo, que os números 3, 7 e 10 estão profundamente relacionados entre si. Em vez de terem de fixar os quatro factos numéricos, $3+7=10$, $7+3=10$, $10-3=7$ e $10-7=3$, de forma isolada, as crianças tomam consciência que estas igualdades apresentam a mesma informação, apenas escrita de maneiras diferentes.

Do ponto de vista das crianças, os esquemas todo-partes constituem uma oportunidade para brincar com os números. Do ponto de vista do professor, a consolidação das decomposições dentro da primeira dezena é um pilar fundamental que sustentará, no futuro, cálculos mais avançados e estratégias de exploração do sistema de numeração decimal.

Number bonds (Esquemas todo-partes)

Uma janela para futuras explorações...



Bisk, R. (2015). *Concrete Pictorial Abstract: Singapore's Approach to Math Instruction*, Presentation at 2015 NCTM Conference in Boston. <https://sites.google.com/site/singmathproject>

Bruner, J. (1960). *The process of education*, Harvard University Press.

Marshall Cavendish (2008). *Primary Mathematics 1A Textbook*, Singapore.

Marshall Cavendish (2015). *Math in Focus 1A Textbook*, Singapore.

Santos, C. P. & Teixeira, R. C. (2015). Matemática na educação pré-escolar: Esquemas todo-partes. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 4, 55-70.

Ma, L. (2009). *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, Gradiva.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*, MEC -- Direção Geral da Educação.

Ministry of Education. (2012). *Primary mathematics teaching and learning syllabus*, Singapore.